Vektor **A**uto**R**egression (VAR) Modeller
Forelæsningsnoter til FR86

Jesper Lund

mail@JesperLund.com
http://www.JesperLund.com

11. november 2002

1 Indledning

Formålet med denne forelæsningsnote er at beskrive VAR modeller i forbindelse med test af present value (PV) modeller. Noten kan med fordel læses i sammenhæng med afsnit 7.2.3 i Campbell et al. (1997).

2 VAR modellen

Lad $\mathbf{x}_t$ være en n-dimensional stokastisk vektor, altså en $n \times 1$ vektor af stokastiske variable. Vi antager at $\mathbf{x}_t$ kan beskrives ved følgende stokastiske process

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}, \tag{1}$$

hvor $\mathbf{A}$ er en $n \times n$ matrix af VAR koefficienter (parametre). Hvis $n = 2$, kan VAR modellen også skrives som

$$x_{1,t+1} = a_{11}x_{1t} + a_{12}x_{2t} + \varepsilon_{1,t+1} \tag{2}$$
$$x_{2,t+1} = a_{21}x_{1t} + a_{22}x_{2t} + \varepsilon_{2,t+1}, \tag{3}$$

men matrix formen (1) er naturligvis mere generel. Fejlleddet $\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}$ i ligning (1) antages at opfylde følgende betingelser:

$$E_t\left[\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}\right] = \mathbf{0} \tag{4}$$
$$E_t\left[\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}\boldsymbol{\varepsilon}'_{t+1}\right] = \boldsymbol{\Omega}. \tag{5}$$

I forhold til en generel VAR(p) model, er der i ligning (1) gjort to forenklende antagelser:

- Den ubetingede middelværdi af den stokastiske vector $\mathbf{x}_t$ er $\mathbf{0}$, dvs. $E(\mathbf{x}_t) = \mathbf{0}$. Man kan se dette ved at der ikke er noget konstantled i modellen. I forbindelse med test af PV modeller er dette en fuldt acceptabel forenkling, eftersom man generelt ikke er interesseret i at teste restriktioner på konstantleddet, men alene på parametrene i matricen $\mathbf{A}$. Inden man estimerer disse parametre skal man blot huske at trække gennemsnittet fra alle variable i $\mathbf{x}_t$.

- VAR modellen er af første orden. Det er muligt at opstille højere ordens VAR modeller, f.eks. en VAR(2) model, hvor

  $$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_t + \mathbf{A}_2\mathbf{x}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}, \tag{6}$$

  men den ekstra generalitet får vi ikke brug for her [og det diskuteres heller ikke i Campbell et al. (1997)].

3 Estimation af parametrene

Eftersom (1) kan opfattes som en multivariat regressionsmodel, hvor $\mathbf{x}_t$ udgør de forklarende variable, kan vi estimere parametrene i matricen $\mathbf{A}$ vha. OLS. Det kan vises at OLS svarer til maximum likelihood hvis fordelingen for fejlleddet $\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}$ er den multivariate normalfordeling [se kapitel 6 i Campbell et al. (1997)]. Under alle omstændigheder kan OLS gennemføres ligning-for-ligning (uden tab af efficiens), idet der er præcist de samme forklarende variable i alle n regressionsligninger.

Som nævnt ovenfor er der ikke noget konstantled i regressionsmodellen, og estimationen skal tage hensyn til dette. I forbindelse med test af PV modeller skyldes fraværet af konstantled dog typisk, at man ikke ønsker at teste restriktioner på konstantleddet, og det gøres nemmest ved at fratrække middelværdien (gennemsnittet) fra alle variable i vektoren $\mathbf{x}_t$.

Beregning af standardafvigelser for parametrene i matricen $\mathbf{A}$ sker ud fra de sædvanlige OLS formler. Når fejlleddet opfylder betingelserne i ligning (4)–(5) er der ikke behov for at korrigere for heteroskedasticitet (eller autokorrelation).

4 Forecast funktionen for en VAR model

I det næste afsnit skal vi bruge VAR modellen til forecasts, bl.a. af fremtidige dividender. Den betingede forventning af $\mathbf{x}_{t+1}$ er

$$E_t\left[\mathbf{x}_{t+1}\right] = \mathbf{A}\mathbf{x}_t, \tag{7}$$

da $E_t\left[\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}\right] = \mathbf{0}$. Ved at bruge loven om itererede forventninger kan det vises at

$$E_t\left[\mathbf{x}_{t+k}\right] = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_t, \tag{8}$$

hvor $\mathbf{A}^k$ skal læses som

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA},\ \mathbf{A}^3 = \mathbf{AAA},\ \mathbf{A}^4 = \mathbf{AAAA},\ \text{etc}, \tag{9}$$

altså matricen $\mathbf{A}$ multipliceret med sig selv $k-1$ gange. Sagt med andre ord: $\mathbf{A}^k$ er matrix generaliseringen af potensopløftning for skalarer.

5 Fra PV modeller til krydsligningsrestriktioner på en VAR model

Dette emne vil blive illustreret med et konkret eksempel [der er flere eksempler i afsnit 7.2.3 i Campbell et al. (1997)], hvor aktiekursen er bestemt af en PV model med konstant forventet afkast:

$$P_t = \sum_{i=1}^{\infty} d^i E_t\left[D_{t+i}\right], \quad d = (1+R)^{-1}. \tag{10}$$

Diskonteringsrenten R forudsættes at være kendt. Endvidere antager vi at $[P_t D_t]'$ kan beskrives ved en første ordens VAR model.[1] Som nævnt ovenfor er det underforståaet at P_t og D_t er fratrukket deres middelværdier.

Den næste trin er at erstatte $E_t[D_{t+i}]$ med VAR modellens forecast, som er

$$E_t\left[D_{t+i}\right] = \boldsymbol{e2}'\mathbf{A}^i\mathbf{x}_t, \quad \text{hvor } \boldsymbol{e2} = [0\ 1]'. \tag{11}$$

Hvis vi indsætter dette udtryk i ligning (10), kan PV modellen skrives som[2]

$$P_t = \sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{e2}' d^i \mathbf{A}^i \mathbf{x}_t = \boldsymbol{e2}' d\mathbf{A}\left(\mathbf{I} - d\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{x}_t \tag{14}$$

Da det samtidig gælder at $P_t = \boldsymbol{e1}'\mathbf{x}_t$ for $\boldsymbol{e1} = [1\ 0]'$, og da sammenhængen i (14) skal gælde for **alle** værdier af $\mathbf{x}_t$, kan vi udlede følgende restriktioner på parametrene i $\mathbf{A}$:

$$\boldsymbol{e1}' = \boldsymbol{e2}' d\mathbf{A}\left(\mathbf{I} - d\mathbf{A}\right)^{-1}. \tag{15}$$

Ligning (15) indeholder 2 ikke-lineære restriktioner. Disse kan testes vha. et Wald test ("delta" metoden), se Campbell et al. (1997), side 540.

I det aktuelle tilfælde er det imidlertid muligt at transformere restriktionerne til lineære restriktioner. Hvis man postmultiplicerer med $\mathbf{I} - d\mathbf{A}$ på begge sider af lighedstegnet fås

$$\boldsymbol{e1}'\left(\mathbf{I} - d\mathbf{A}\right) = \boldsymbol{e2}' d\mathbf{A} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{e1}'\left((1+R)\mathbf{I} - \mathbf{A}\right) = \boldsymbol{e2}'\mathbf{A} \tag{16}$$

Den sidste udgave fremkommer med at dividere med $d = (1+R)^{-1}$ på begge sider af lighedstegnet.

På ikke-matrix form kan disse restriktioner skrives som

$$a_{21} = (1+R) - a_{11} \tag{17}$$

$$a_{22} = -a_{12} \tag{18}$$

[1] Bemærk at dette formulering af VAR modellen alene er valgt for at give en simpel beskrivelse af de restriktioner, som man kan udlede af en PV model. I praksis vil man aldrig definere VAR modellen for P_t og D_t på denne måde, da disse variable er såkaldte ikke-stationaære stokastiske processer (unit root processer). Se Campbell et al. (1997) for mere realitiske eksempler.

[2] Ved at generalisere formlerne for summen af en rækkeudvikling til matricer, kan det vises at

$$\sum_{i=0}^{K-1} \mathbf{A}^i = \left(\mathbf{I} - \mathbf{A}^K\right)\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1} \tag{12}$$

Hvis VAR modellen er "stabil" (i en bestemt statistisk forstand, som vi ikke skal definere her) er $\lim_{K\to\infty}\mathbf{A}^K = \mathbf{0}$, hvorved

$$\lim_{K\to\infty}\sum_{i=0}^{K} \mathbf{A}^i = \left(\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}. \tag{13}$$

Dette resultat bruges i ligning (14).

For at give en økonomisk fortolkning af disse restriktioner, kan vi betragte forecast funktionen i VAR modellen med restriktionerne (17) og (18)

$$E_t \begin{bmatrix} P_{t+1} \\ D_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ (1+R) - a_{11} & -a_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_t \\ D_t \end{bmatrix}, \tag{19}$$

og det gælder endvidere at

$$\begin{aligned} E_t \left[P_{t+1} + D_{t+1} \right] &= a_{11} P_t + a_{12} D_t + \left((1+R) - a_{11} \right) P_t - a_{12} D_t \\ &= (1+R) P_t, \end{aligned} \tag{20}$$

da alle andre led går ud med hinanden. Ligning (20) kan fortolkes som at forventede afkast ikke kan forudsiges, hvilket altså er hvad krydsligningsrestriktionerne på tværs af P_t og D_t ligningerne sikrer.

6 Statistisk test af lineære restriktioner

Lad $\boldsymbol{\theta}$ være en $n^2 \times 1$ vektor, som indeholder alle parametre fra matricen $\mathbf{A}$. Hvis en PV model giver anledning til m lineære restriktioner på parametrene i $\mathbf{A}$, kan disse restriktioner generelt skrives som

$$\mathrm{H}_0\text{: } \mathbf{R}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{c}, \tag{21}$$

hvor $\mathbf{R}$ er en $m \times n^2$ matrix (med konstante koefficienter), og $\mathbf{c}$ er en $m \times 1$ vektor af konstanter. Under nul-hypotesen vil det gælde at (asymptotisk)

$$\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{c} \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \mathbf{R}\mathrm{Cov}(\hat{\boldsymbol{\theta}})\mathbf{R}' \right), \tag{22}$$

hvor $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ er OLS estimatet på $\boldsymbol{\theta}$, med tilhørende kovariansmatrix $\mathrm{Cov}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$. Som teststørrelse kan man bruge Wald testet

$$W = \left(\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{c} \right)' \left(\mathbf{R}\mathrm{Cov}(\hat{\boldsymbol{\theta}})\mathbf{R}' \right)^{-1} \left(\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{c} \right), \tag{23}$$

som er $\chi^2(m)$ fordelt under nul-hypotesen.

Literatur

Campbell, J.Y., A.W. Lo and A.C. MacKinlay (1997), *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press.